全品

教辅图书 功能学具 学生之家

基础教育行业专研品牌

30+年创始人专注教育行业

全品学练考

AI智慧升级版

主编 肖德好

导学案

高中数学6

基础版

选择性必修第二册 RJA

本书为智慧教辅升级版

“讲课智能体”支持学生聊着学，扫码后哪里不会选哪里；随时随地想聊就聊，想问就问。

天津出版传媒集团
天津人民出版社

CONTENTS 目录 导学案

04 第四章 数列

PART FOUR

05 第五章　一元函数的导数及其应用

PART FIVE

第四章　数列

4.1　数列的概念

第 1 课时　数列的概念与表示

【学习目标】

1. 了解数列的概念，知道什么是数列，能说出数列的项.

2. 了解数列的表示方法，会用表格、图象、通项公式表示数列，能用通项公式求任意项或根据数列的前几项写出数列的一个通项公式.

3. 了解数列与函数的关系，能用函数的观点看待数列，并能说出数列与函数的共性与差异.

课堂明新知

知识导学　典例探究

◆ 要点一　数列的概念与分类

新知构建

1. 数列的概念

按照确定的________排列的一列数称为数列.

2. 数列的项

(1)数列中的____________叫作这个数列的项.数列的第一个位置上的数叫作这个数列的第 1 项，常用符号________表示，第二个位置上的数叫作这个数列的第 2 项，用________表示……第 n 个位置上的数叫作这个数列的第 n 项，用________表示.其中第 1 项也叫作________.

(2)数列的一般形式是 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，简记为________.

3. 数列的分类

(1)按项的个数分类

类别	含义
有穷数列	项数________的数列
无穷数列	项数________的数列

(2)按项的变化趋势分类

类别	含义
递增数列	从第 2 项起，每一项都________它的前一项的数列
递减数列	从第 2 项起，每一项都________它的前一项的数列
常数列	各项都________的数列

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打“√”或“×”)

(1)李萍从 6 岁到 18 岁，每年生日那天测量体重，依次排成一列数，可以构成数列.　(　　)

(2)数列 $-1,-\frac{1}{2},-\frac{1}{4},-\frac{1}{8},-\frac{1}{16},\cdots$ 是递减数列且是无穷数列.　(　　)

(3)数列 1,3,5,7,9 与数列 9,7,5,3,1 是同一个数列.　(　　)

(4)符号 a_n 和 $\{a_n\}$ 表示的意思相同.　(　　)

典例解析

例 1　(1)已知下列数列：①$1,0.84,0.84^2,0.84^3$；②$2,4,6,8,10,\cdots,2n,\cdots$；③$7,7,7,7,\cdots$；④$\frac{1}{3},\frac{1}{9},\frac{1}{27},\frac{1}{81},\cdots,\frac{1}{3^n},\cdots$；⑤1,2,3,4,5,6,7,8,9,10；⑥$0,-1,2,-3,4,-5,\cdots$.

其中，有穷数列是________，无穷数列是________，递增数列是________，递减数列是________，常数列是________.(填序号)

(2)下列说法正确的是　(　　)

A. 数列 4,7,3,4 的首项是 4

B. 在数列$\{a_n\}$中，若 $a_1=3$，则从第 2 项起，各项均不等于 3

C. 数列 3,6,8 可以表示为$\{3,6,8\}$

D. $a,-3,-1,1,b,5,7,9,11$ 一定能构成数列

[素养小结]

判断数列的类型应注意的几个方面:(1)判断一个数列是有穷数列还是无穷数列的关键是判断数列的项数是有限的还是无限的;(2)判断一个数列的单调性一般是根据数列中的 a_{n+1} 与 a_n 的大小来判断,即①若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n<a_{n+1}$,则是递增数列,②若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n>a_{n+1}$,则是递减数列.

◆ 要点二　数列的表示

新知构建

1. 通项公式:如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与它的序号________之间的对应关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的__________. 有些数列的通项公式表达形式不唯一.

2. 通项公式的作用:①求数列中的任意一项;②检验某数是否为该数列中的项.

3. 数列与函数表示的比较

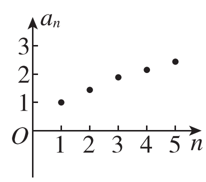
	函数	数列
定义域	**R**(或 **R** 的子集)	正整数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集 $\{1,2,3,\cdots,n\}$)
解析式	$y=f(x)$	$a_n=f(n)$
值域	y 的取值范围	由自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值构成
表示方法	解析法、列表法、图象法	通项公式(解析法)、列表法、图象法

4. 数列的其他表示法

(1)表格表示,如下表.

n	1	2	3	$\cdots$
a_n	a_1	a_2	a_3	$\cdots$

(3)图象表示,如图.



【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)有些数列没有通项公式.　　(　　)

(2)若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=2n-1$,则数列 $\{a_n\}$ 的图象与函数 $y=2x-1$ 的图象相同.　(　　)

(3)若数列 $\{a_n\}$ 的前 5 项为 $-1,1,-1,1,-1$,则 $\{a_n\}$ 的通项公式可能为 $a_n=(-1)^n$ 或 $a_n=\begin{cases}-1,n=2k-1,\\1,n=2k\end{cases}(k\in\mathbf{N}^*)$ 或 $a_n=\cos n\pi$ 等.

(　　)

典例解析

角度 1　已知通项公式写数列的项

例 2　根据数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,写出数列的前 5 项,并用图象表示出来.

(1)$a_n=\frac{1}{2}n-1$;

(2)$a_n=\sin\frac{(n+2)\pi}{2}$.

[素养小结]

数列 $\{a_n\}$ 的通项公式给出了第 n 项 a_n 与它的位置序号 n 之间的关系,只要用序号代替公式中的 n,就可以求出数列中相应的项.

角度 2　已知数列的项写通项公式

例 3　写出下列数列的一个通项公式.

(1)$\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{7}{8},\frac{15}{16},\cdots$;

(2)$\frac{1}{1\times2},-\frac{1}{2\times3},\frac{1}{3\times4},-\frac{1}{4\times5},\cdots$;

(3)$-1,\frac{8}{5},-\frac{15}{7},\frac{24}{9},\cdots$.

变式 根据数列的前几项,写出下列各数列的一个通项公式:

(1)9,99,999,9999,…;

(2)$\sqrt{3}$,3,$\sqrt{15}$,$\sqrt{21}$,…;

(3)$\frac{2}{3}$,$\frac{3}{5}$,$\frac{10}{7}$,$\frac{15}{9}$,$\frac{26}{11}$,….

[素养小结]

根据数列的前几项猜想数列的通项公式,若所给前几项为分数,则可分别观察分子组成的数列特征与分母组成的数列特征.若所给前几项为正负相间的项,则可用-1的幂进行符号调节.当猜想的难度较大,不易猜出时,可尝试以下方法将数列转化为易于猜想的数列:对数列的各项同时进行加、减、乘、除同一数;对数列各项分别加、减、乘、除该项的项数;将各项分解为若干项的和、差、积、商等形式.如猜想2,5,9,17的通项公式,可采取各项减1变化为1,4,8,16.

◆ 要点三　数列通项公式的简单应用

例4 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=3n^2-28n$.

(1)写出数列$\{a_n\}$的第4项和第6项.

(2)-49和68是否为该数列的项?

(3)数列$\{a_n\}$中有多少个负数项?

变式 已知数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\frac{2n^2-3n}{4n^2-9}$.

(1)求a_4.

(2)$\frac{45}{101}$是不是该数列中的项?为什么?

(3)在区间$\left(\frac{3}{10},\frac{7}{20}\right)$内是否有该数列中的项?若有,求出有几项;若没有,请说明理由.

[素养小结]

判断某个数是否为数列中的项,需先假设它是数列中的项,然后列方程求解.若方程有正整数解,则该数是数列中的项;若方程无解或解均不是正整数,则该数不是数列中的项.

拓展 (1)已知$a_n=\frac{n-\sqrt{79}}{n-\sqrt{80}}(n\in\mathbf{N}^*)$,则数列$\{a_n\}$前50项中的最小项和最大项分别是　(　　)

A. a_1,a_{50}　　B. a_1,a_8

C. a_8,a_9　　D. a_9,a_{50}

(2)数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=-2n^2+\lambda n$ $(n\in\mathbf{N}^*,\lambda\in\mathbf{R})$,若$\{a_n\}$是递减数列,则$\lambda$的取值范围是　(　　)

A. $(-\infty,4)$　　B. $(-\infty,4]$

C. $(-\infty,6)$　　D. $(-\infty,6]$

第 2 课时　数列的递推公式与前 n 项和

【学习目标】

1. 会用递推公式表示数列,能根据数列的递推公式写出数列的前几项.
2. 了解数列的前 n 项和,并能利用 S_n 与 a_n 的关系解决一些简单问题.

课堂明新知　　知识导学　典例探究

◆ 要点一　数列的递推公式

新知构建

概念:如果一个数列的相邻两项或多项之间的关系可以用一个式子来表示,那么这个式子叫作这个数列的________.

作用:知道了首项或前几项,以及递推公式,就能求出数列的每一项.

【诊断分析】1. 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)所有的数列都有递推公式.　(　　)

(2)数列的递推公式是关于 n 的函数关系式.　(　　)

(3)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=3$,$a_{n+1}=2a_n-2$,则 $a_2=4$.　(　　)

2. 仅由数列$\{a_n\}$的递推公式 $a_n=3a_{n-1}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$能否确定这个数列?若再已知 $a_2=3$ 呢?

典例解析

例 1 (1)如图所示,实心点的个数依次为 5,9,14,20,…,记此数列为$\{a_n\}$,则　(　　)

A. $a_{n+1}+a_n=n+2$

B. $a_{n+1}-a_n=n+2$

C. $a_{n+1}+a_n=n+3$

D. $a_{n+1}-a_n=n+3$

(2)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$,$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{2+a_n}$,写出它的前 5 项,并归纳出数列$\{a_n\}$的一个通项公式.

变式 (1)数列 1,3,7,15,31,63,…满足的递推公式为　(　　)

A. $a_{n+1}=a_n+2$　　B. $a_{n+1}=2a_n+1$

C. $a_{n+1}=3a_n$　　D. $a_{n+1}=a_n+2^{n-1}$

(2)数列$\{a_n\}$中,$a_1=1$,$4a_{n+1}-a_na_{n+1}+2a_n=9$ $(n\in\mathbf{N}^*)$.

①写出数列$\{a_n\}$的前 4 项;

②请直接写出$\{a_n\}$的一个通项公式.

[素养小结]

(1)递推公式的作用:已知数列的某一项,利用递推公式可以写出数列的每一项.对于具有周期性的数列,一般利用递推公式写出几项就能发现其周期变化规律.

(2)递推公式与通项公式的区别:递推公式揭示了数列的相邻项之间的关系,已知前面的项可以递推出后面的项;通项公式揭示了项与其序号之间的关系,把序号代入通项公式可以直接求出该项.

(3)某些用递推公式给出的数列,写出数列的前几项后,由前几项分析其特点、规律,即可归纳总结出数列的一个通项公式.

(4)形如 $a_{n+1}-a_n=f(n)$或$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$的递推关系,可以利用累加法或累乘法求出通项公式.

◆ 要点二　数列的前 n 项和

新知构建

1. 概念及表示

我们把数列$\{a_n\}$从第 1 项起到第 n 项止的各项之和，称为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，记作 S_n，即 $S_n=$________.

2. 数列的前 n 项和公式

如果数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 与它的序号 n 之间的对应关系可以用一个________来表示，那么这个________叫作这个数列的前 n 项和公式.

3. 数列$\{a_n\}$的通项公式与前 n 项和 S_n 的关系

在数列$\{a_n\}$中，S_n 为其前 n 项和，显然 $S_1=a_1$，而 $S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$，于是 $a_n=\begin{cases}\_\_\_\_\_\_\_\_, n=1,\\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_, n\geqslant 2.\end{cases}$

【诊断分析】 判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3n+1$，则 $a_1=4$，$a_4=3$.　(　　)

(2)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=n^2+1$，则 $a_n=2n-1$.　(　　)

(3)若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，则 $a_3+a_4+a_5+a_6=S_6-S_2$.　(　　)

典例解析

例 2 (1)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=2^n$，则 $a_4+a_5=$　(　　)

A. 48　　B. 32

C. 24　　D. 8

(2)已知数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\dfrac{n(n+1)}{2}$，则数列$\{a_n\}$的前 3 项和 $S_3=$________.

变式 (1)[2025·山东青岛高二质检] 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+n$，则 $a_7=$　(　　)

A. 11　B. 12　C. 13　D. 14

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=an^2$，若 $S_{10}=600$，则 $a_3-a_5-a_6=$________.

[素养小结]

对于已知数列的前 n 项和公式求数列的某一项问题，主要利用定义解决.

◆ 要点三　利用数列的前 n 项和公式求通项公式

例 3 下面给出了数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n，求$\{a_n\}$的通项公式.

(1)$S_n=2n^2-3n$；

(2)$S_n=4-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

变式 (1)[2025·重庆巴蜀中学高二期中] 若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=-n^2+14$，则$\{a_n\}$的通项公式为__________.

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=3^n-2$(n 为正整数)，则此数列的通项公式为 $a_n=$________.

[素养小结]

已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 求解通项公式时，一般先根据 $a_1=S_1$ 求出 a_1，再根据 $a_n=S_n-S_{n-1}$ $(n\geqslant 2)$ 计算出当 $n\geqslant 2$ 时的通项公式，然后验证 a_1 是否满足上式，由此决定数列$\{a_n\}$的通项公式是否需要分段书写.

拓展微课（一）　求数列的通项公式常用方法

◆ 方法一　由数列的前 n 项和求通项公式

已知 $S_n=f(a_n)$或 $S_n=f(n)$求 a_n 的解题步骤：

第一步，利用 S_n 满足的条件，写出当 $n\geqslant 2$ 时，S_{n-1} 的表达式；

第二步，利用 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，求出 a_n 或者转化为 a_n 的递推公式的形式；

第三步，若求出了 $n\geqslant 2$ 时$\{a_n\}$的通项公式，再根据 $a_1=S_1$ 求出 a_1，并代入 $n\geqslant 2$ 时$\{a_n\}$的通项公式进行验证，若成立，则合并，若不成立，则写成分段形式.

例 1 (1)[2025·山西省实验中学高二月考]若数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=2n^2-4n+1$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=$____________.

(2)已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且满足 $3a_n-2S_n=1(n\in\mathbf{N}^*)$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.

◆ 方法二　累加法

求形如 $a_{n+1}=a_n+f(n)$的通项公式，可将原递推公式转化为 $a_{n+1}-a_n=f(n)$，再利用累加法(逐差相加法)求解，即由 $a_2-a_1=f(1)$，$a_3-a_2=f(2)$，…，$a_n-a_{n-1}=f(n-1)(n\geqslant 2)$，累加可得 $a_n-a_1=f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1)(n\geqslant 2)$.

例 2 (1)在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，则 $a_n=$　(　　)

A. $\dfrac{1}{n}$　　B. $\dfrac{2n-1}{n}$

C. $\dfrac{n-1}{n}$　　D. $\dfrac{1}{2n}$

(2)[2025·天津耀华中学高二月考]已知数列$\{a_n\}$的首项为 2，且 $a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$，则 $a_n=$____________.

◆ 方法三　累乘法

求形如 $a_{n+1}=f(n)a_n$ 的通项公式，可将原递推公式转化为 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=f(n)$，再利用累乘法(逐商相乘法)求解，即由 $\dfrac{a_2}{a_1}=f(1)$，$\dfrac{a_3}{a_2}=f(2)$，…，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=f(n-1)(n\geqslant 2)$，累乘可得$\dfrac{a_n}{a_1}=f(1)\cdot f(2)\cdot\cdots\cdot f(n-1)(n\geqslant 2)$.

例 3 (1)已知数列$\{a_n\}$满足$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n\cdot 2^n}{n+1}$，且 $a_1=1$，则 $a_8=$　(　　)

A. 2^8　　B. 2^{20}　　C. 2^{25}　　D. 2^{28}

(2)(多选题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_n=a_1+\dfrac{1}{2}a_2+\dfrac{1}{3}a_3+\cdots+\dfrac{1}{n-1}a_{n-1}(n>1$ 且 $n\in\mathbf{N}^*)$，则　(　　)

A. $a_2=1$　　B. $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{n}{n-1}(n>1)$

C. $a_n=\dfrac{n}{2}$　　D. $a_n=\begin{cases}1, n=1,\\ \dfrac{n}{2}, n\geqslant 2\end{cases}$

◆ 方法四　构造法

(1)对于形如 $a_{n+1}=pa_n+q$(其中 p，q 为常数，且 $pq(p-1)\neq 0$)的数列可利用待定系数法构造等比数列求通项.

(2)对于形如 $a_n-a_{n+1}=ka_na_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$($k$ 为常数)或形如 $a_{n+1}=\dfrac{ka_n}{a_n+k}(n\in\mathbf{N}^*)$($k\neq 0$ 且 k 为常数)的数列，常通过等式两边同除以 a_na_{n+1} 或取倒数的方法构造等差数列求解.

例 4 (1)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为__________.

(2)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_n-a_{n+1}=3a_na_{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$，数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\dfrac{1}{a_n}$，且 $b_1+b_2+\cdots+b_9=90$，则 $a_n=$________.

拓展微课（二） 数列求和常用方法

◆ 方法一 倒序相加法

如果一个数列满足与首末两项等“距离”的两项之和等于首末两项之和，那么这个数列的前 n 项和即可用倒序相加法来求，如等差数列的前 n 项和公式就是用此方法推导的.

例 1 (1) $\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{2}{4}+\frac{3}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{60}+\frac{2}{60}+\cdots+\frac{59}{60}\right)=$________.

(2)已知函数 $f(x)$ 对任意的 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x)+f(1-x)=1$，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n=f(0)+f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+f\left(\frac{n-1}{n}\right)+f(1)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 16 项和为________.

◆ 方法二 分组求和法

如果一个数列是由若干个等差数列或等比数列或其他可求和的数列组成的，那么求和时可用分组求和法，分别求和后再相加减.

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2$. 数列 $\{b_n\}$ 是各项都为正数的等比数列，且满足 $b_1b_3=\frac{1}{16}$，$b_5=\frac{1}{32}$.

(1)求数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2)记 $c_n=2a_n-b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

例 3 [2025·南京外国语学校高二月考] 设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 $S_n=\frac{n}{2}(1+a_n)$，且 $a_2+a_3=5$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2)数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n=\begin{cases}a_n, n\text{ 为奇数},\\ 2^n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$ 求其前 n 项和 R_n.

◆ 方法三 裂项相消法

把数列的通项公式拆成两项的差，求和时可正负相消，最后只剩下首尾若干项.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$4a_{n+1}=4-\frac{1}{a_n}$.

(1)证明：$\left\{\frac{1}{2a_n-1}\right\}$ 是等差数列；

(2)设 $b_n=\frac{a_n}{(n+1)(n+2)}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n.

例 5 [2025·重庆一中高二期中] 已知$\{a_n\}$为等差数列,其公差为d,前n项和为S_n,$\{b_n\}$为等比数列,其公比为q,前n项和为T_n,若$d=q\neq1$,$a_5=T_3$,$S_9=T_6$,$a_1=6$.

(1)求公差d和b_1;

(2)记$c_n=\dfrac{b_n}{(b_{n+1}-1)(b_n-1)}$,证明:$c_1+c_2+\cdots+c_n<1$.

◆ **方法四 错位相减法**

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的,那么这个数列的前n项和即可用错位相减法来求,如等比数列的前n项和公式就是用此方法推导的.

例 6 已知等差数列$\{a_n\}$和各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$满足$a_1=b_1=3$,$a_{10}-12=b_2$,$3a_4=b_3$.

(1)求数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的通项公式;

(2)记$c_n=a_n\cdot b_n$,数列$\{c_n\}$的前n项和为S_n,求S_n.

4.4* 数学归纳法

【学习目标】

1. 了解数学归纳法的原理.
2. 能用数学归纳法证明与正整数n有关的一些简单命题.

课堂明新知

知识导学 典例探究

◆ **要点一 数学归纳法**

新知构建

一般地,证明一个与________有关的命题,可按下列步骤进行:

(1)(归纳奠基)证明当$n=$________时命题成立;

(2)(归纳递推)以"当$n=k(k\in\mathbf{N}^*,k\geqslant n_0)$时命题成立"为条件,推出"当$n=$________时命题也成立".

只要完成这两个步骤,就可以断定命题对从n_0开始的所有正整数n都成立,这种证明方法称为数学归纳法.

【诊断分析】判断正误.(请在括号中打"√"或"×")

(1)与正整数n有关的数学命题只能用数学归纳法证明. ( )

(2)数学归纳法证明的第一步中n的初始值n_0只能是1. ( )

(3)数学归纳法的两个步骤缺一不可. ( )

典例解析

例 1 (1)用数学归纳法证明 $1+a+a^2+\cdots+a^{n+1}=\frac{1-a^{n+2}}{1-a}(0<a<1,n\geqslant 1,n$ 是正整数),在验证 $n=1$ 时,左边所得的项为 ( )

A. 1　　B. $1+a$

C. $1+a+a^2$　　D. $1+a+a^2+a^3$

(2)用数学归纳法证明不等式 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$ 的过程中,由 $n=k$ 递推到 $n=k+1$ 时,不等式左边 ( )

A. 增加了 $\frac{1}{2(k+1)}$

B. 增加了 $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}$

C. 增加了 $\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}$

D. 增加了 $\frac{1}{2(k+1)}-\frac{1}{k+1}$

[素养小结]

弄清楚等式或不等式两侧的项的变化规律,才能清楚增加了哪些项或增加了多少项以及减少了哪些项.

变式 利用数学归纳法证明不等式 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}<n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$ 的过程中,由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,左边增加了 ( )

A. 1 项　　B. k 项

C. 2^{k-1} 项　　D. 2^k 项

◆ 要点二　数学归纳法的应用

新知构建

数学归纳法主要适用于以下类型的问题:

1. 与自然数有关的问题:

这类问题通常涉及一个与自然数 n 有关的命题 $P(n)$,需要证明该命题对所有自然数(或某个自然数集的子集)都成立.

2. 数列问题:

当需要证明一个数列的某项性质(如通项公式、单调性、有界性等)对所有项都成立时,可以使用数学归纳法.

3. 不等式问题:

在证明与自然数有关的不等式时,数学归纳法是一种有效的工具.通过归纳奠基步骤和归纳递推步骤,可以逐步推导出不等式对所有自然数都成立.

4. 整除性问题:

当需要证明某个表达式对所有自然数都能被某个数整除时,可以使用数学归纳法.通过归纳奠基步骤和归纳递推步骤,可以推导出该表达式对所有自然数都满足整除条件.

典例解析

角度 1　证明和 n 有关的等式

例 2 用数学归纳法证明:$\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

变式 用数学归纳法证明:$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

[素养小结]

利用数学归纳法证明代数恒等式时要注意两点:一是要准确表述 $n=n_0$ 时命题的形式,二是要准确把握由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,命题结构的变化特点,即弄清从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时,等式两端增加了哪些项,减少了哪些项.并且一定要记住:在证明 $n=k+1$ 成立时,必须使用归纳假设.

角度2　证明不等式问题

例3　用数学归纳法证明 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2}+n(n\in\mathbf{N}^*)$.

变式　[2025·福建莆田十六中高二期中]用数学归纳法证明:$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{3n+1}>1(n\in\mathbf{N}^*)$.

[素养小结]

在利用数学归纳法证明不等式的第二步中,必须用上归纳假设,但具体的证明过程可以灵活运用作差比较或放缩等方法.

角度3　证明数列问题

例4　已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$,记该数列的前 n 项和为 S_n.

(1)计算 S_1,S_2,S_3,S_4 的值;

(2)根据计算结果,猜想 S_n 的表达式,并用数学归纳法证明.

变式　[2025·上海延安中学高二月考]已知数列 $\{a_n\}$ 的每一项均为正数,$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n,且 $4S_n=a_n^2+2a_n$,尝试通过计算数列 $\{a_n\}$ 的前四项,猜想数列 $\{a_n\}$ 的通项公式,并用数学归纳法加以证明.

[素养小结]

用数学归纳法解决数列问题的两个步骤:

(1)归纳:通过写出数列中的若干项,归纳出数列的通项公式或前 n 项和公式;

(2)证明:利用数学归纳法证明归纳出的结论.

角度4 证明整除问题

例5 求证:$a^{n+1}+(a+1)^{2n-1}(n\in \mathbf{N}^*, a\in \mathbf{N}^*)$能被 a^2+a+1 整除.

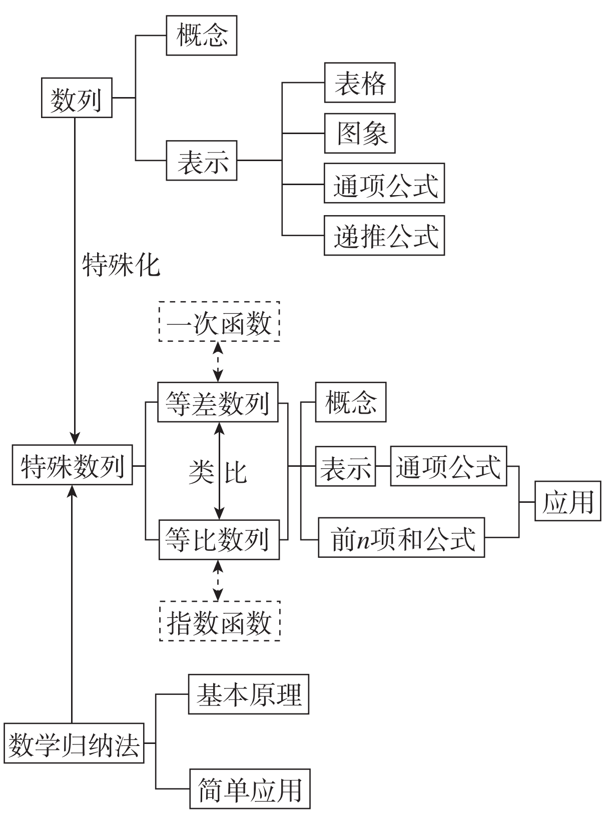
变式 是否存在正整数 m 使得 $f(n)=(2n+7)\cdot 3^n+9$ 对任意正整数 n 都能被 m 整除?若存在,求出最大的 m 的值,并证明你的结论;若不存在,请说明理由.

[素养小结]

利用数学归纳法证明整除问题,关键是熟练掌握数学归纳法的基本步骤,根据步骤对代数式变形处理.

本章总结提升

知识网络



素养提升

◆ 题型一 数列通项公式的求法

[类型总述](1)观察归纳法;(2)公式法;(3)利用 a_n 与 S_n 的关系;(4)累加法;(5)累乘法;(6)构造法等.

例1 (1)已知数列$\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$是首项为3,公差为1的等差数列,则 $a_{2024}=$ ( )

A. $\frac{2025}{2026}$ B. $\frac{1012}{1013}$

C. $\frac{2025}{2024}$ D. $\frac{1011}{1013}$

(2)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1, a_n=a_{n-1}+3n-2(n\geqslant 2)$,则$\{a_n\}$的通项公式为 ( )

A. $a_n=3n^2$

B. $a_n=3n^2+n$

C. $a_n=\frac{3n^2-n}{2}$

D. $a_n=\frac{3n^2+n}{4}$

(3)若数列$\{a_n\}$满足$(n-1)a_n=(n+1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，$a_1=2$，则满足不等式$a_n<930$的最大正整数$n$为 ( )

A. 28　　B. 29　　C. 30　　D. 31

(4)(多选题)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$，设$\{a_n\}$的前$n$项和为$S_n$，则( )

A. $\left\{a_n-\frac{1}{2}\right\}$是等比数列

B. $\left\{a_n+\frac{1}{2}\right\}$是等比数列

C. $a_n=\frac{3^n}{2}-\frac{1}{2}$

D. $S_n=\frac{3^n+2n-1}{4}$

变式1 (1)数列$0,\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{6}{7},\cdots$的一个通项公式为 ( )

A. $a_n=\frac{2(n-1)}{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$

B. $a_n=\frac{n-1}{2n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$

C. $a_n=\frac{n-1}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$

D. $a_n=\frac{2n}{2n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$

(2)[2025·福建三明一中高二月考] 数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$a_1=10$，$na_n=S_n-n(n-1)(n\in\mathbf{N}^*)$，则$S_n$ ( )

A. 存在最大值，且最大值为$\frac{121}{4}$

B. 存在最大值，且最大值为30

C. 存在最小值，且最小值为$\frac{121}{4}$

D. 存在最小值，且最小值为30

变式2 [2022·新高考全国Ⅰ卷节选] 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_1=1$，$\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$是公差为$\frac{1}{3}$的等差数列，求$\{a_n\}$的通项公式.

◆ 题型二　等差数列、等比数列的基本运算及性质

[类型总述] (1)证明一个数列为等差数列或等比数列；(2)等差、等比数列的通项公式及前n项和公式；(3)等差、等比数列的性质及应用.

例2 (1)[2025·江苏南通高二期中] 已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$\frac{S_n}{a_n}=\frac{n+1}{2}$，则$\frac{a_3}{a_5}=$ ( )

A. $\frac{3}{5}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

(2)[2024·新课标Ⅱ卷] 记S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，若$a_3+a_4=7$，$3a_2+a_5=5$，则$S_{10}=$________.

(3)(多选题)已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，则下列说法正确的有 ( )

A. 若数列$\{a_n\}$为等差数列，则$\{2^{a_n}\}$为等比数列

B. 若数列$\{a_n\}$为等差数列，且$S_n>0$恒成立，则$a_{n+1}>a_n$恒成立

C. 若数列$\{a_n\}$为等比数列，则$S_{2025}\cdot a_{2025}>0$恒成立

D. 若数列$\{a_n\}$为等差数列，且$a_1>0$，$S_6=S_{11}$，则S_n的最大值在$n=8$或9时取到

变式 (1)已知公差不为0的等差数列$\{a_n\}$中，$a_1+a_2=a_3$且$a_1a_3=a_2$，则$a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$ ( )

A. 30　　B. $\frac{100}{3}$

C. $\frac{110}{3}$　　D. 40

(2)已知各项均为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，$a_2a_4=9$，$9S_4=10S_2$，则 a_2+a_4 的值为（　　）

A. 30　　B. 10　　C. 9　　D. 6

例 3 ［2023·新课标Ⅰ卷］设等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，且 $d>1$. 令 $b_n=\dfrac{n^2+n}{a_n}$，记 S_n，T_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和.

(1)若 $3a_2=3a_1+a_3$，$S_3+T_3=21$，求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$\{b_n\}$为等差数列，且 $S_{99}-T_{99}=99$，求 d.

变式 在递增的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\cdot a_5=64$，$a_2+a_4=20$.

(1)求 a_n；

(2)若 $b_n=(-1)^{n-1}a_n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

◆ 题型三　等差、等比数列综合问题

［类型总述］(1)等差、等比的转化；(2)等差与等比的综合.

例 4 (1)设等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_2=2$，且 a_2，a_3，a_4-2 成等差数列，则 $S_5=$（　　）

A. 7　　B. 12　　C. 15　　D. 31

(2)已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $b_n=\log_2 a_n(n\in\mathbf{N}^*)$，若$\{b_n\}$是等差数列，$a_{10}a_{2015}=2$，则 $b_1+b_2+\cdots+b_{2024}=$________.

变式 (1)已知等差数列$\{a_n\}$的公差 $d\neq0$，且 a_1，a_3，a_7 成等比数列，则$\dfrac{a_1}{d}=$（　　）

A. 2　　B. 4　　C. 5　　D. 6

(2)(多选题)已知数列$\{a_n\}$满足 $a_{n+1}=a_n^2+2a_n$，$a_1=2$，设 $b_n=\log_3(1+a_n)$，记$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，$\left\{\dfrac{1}{S_n}\right\}$的前 n 项和为 T_n，则（　　）

A. $\{b_n\}$为等差数列

B. $\{a_n+1\}$为等比数列

C. $S_n=b_{n+1}-1$

D. $T_n<2$

例 5 已知递增的等差数列$\{a_n\}$满足 $a_4=5$，且 a_2，a_3，a_6 成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设 $b_n=a_n+2^n$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和 S_n.

变式 [2025·安徽阜阳三中高二月考] 已知$\{a_n\}$是递增的等差数列，$a_1+a_2=4$，且a_1，$2a_2$，$4a_5$成等比数列.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$a_n=\log_2 b_n$，求$b_1b_2-b_2b_3+\cdots+(-1)^{n+1}b_nb_{n+1}$.

◆ **题型四　数列求和问题**

[类型总述] (1)公式法；(2)分组求和法；(3)错位相减法；(4)裂项相消法；(5)并项求和法；(6)倒序相加法.

例6 [2024·全国甲卷] 记S_n为数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$4S_n=3a_n+4$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=(-1)^{n-1}na_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

变式 已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n=\frac{3n^2-n}{2}$，$b_n=\frac{1}{a_na_{n+1}}(n\in\mathbf{N}^*)$，且数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求证：$\frac{1}{4}\leqslant T_n<\frac{1}{3}$.

◆ **题型五　数列与其他知识的交汇**

[**类型总述**] (1)数列与函数的综合;(2)数列与数学文化、实际问题的综合;(3)数列与不等式的综合.

例 7 [2025·杭州二中高二期末] 若数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=a_n^2$,则称数列$\{a_n\}$为“平方递推数列”. 已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=8$,点(a_n,a_{n+1})在函数$f(x)=x^2+4x+2$的图象上,其中n为正整数.

(1)证明:数列$\{a_n+2\}$是“平方递推数列”,且数列$\{\lg(a_n+2)\}$为等比数列;

(2)设$b_n=\lg(a_n+2)$,$c_n=2n-1$,$d_n=\begin{cases}c_n, n\text{ 为奇数},\\ b_n, n\text{ 为偶数},\end{cases}$数列$\{d_n\}$的前$n$项和为$S_n$,且$S_{2n}-2n^2+n+10\geqslant\lambda b_n$恒成立,求$\lambda$的最大值.

变式 已知定义域为$(0,+\infty)$的函数$f(x)$满足$f(xy+1)=\dfrac{f(xy)}{f(x)f(y)+1}$,且$f(2)=\dfrac{1}{2}$,记$a_n=\dfrac{1}{f(n)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若$c_n=\dfrac{1}{2^{a_n}-1}$,记数列$\{c_n\}$的前n项和为T_n,求证:$T_n<2$.

例 8 [2025·山西晋城高二联考] 已知数列$\{a_n\}$与数列$\{b_n\}$满足$b_n=2^{a_n}$,点$P_n(a_n,b_n)(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1)若数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列,$a_2+a_4=-10$,且a_5是a_2和a_{14}的等比中项,求数列$\{b_n\}$的前10项和;

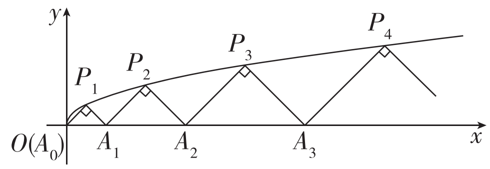
(2)若$a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$,设过两点P_n,P_{n+1}的直线l_n在y轴上的截距为c_n,求数列$\{c_n\}$的前n项和T_n.

◆ 题型六　数学归纳法

[类型总述] 数学归纳法是一种直接证明的方法，主要用来证明与正整数 n 有关的命题.

例 9　用数学归纳法证明：$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2(n\in\mathbf{N}^*)$.

变式　如图，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，…，$P_n(x_n,y_n)(0<y_1<y_2<\cdots<y_n)$是曲线 $C:y=\sqrt{x}$ 上的 n 个点，点 $A_i(a_i,0)(i=1,2,3,\cdots,n)$在 x 轴的正半轴上，且$\triangle A_{i-1}A_iP_i$ 是等腰直角三角形，其中 P_i 为直角顶点，A_0 是坐标原点.



(1)写出 a_1,a_2,a_3；

(2)猜想点 $A_n(a_n,0)(n\in\mathbf{N}^*)$的横坐标 a_n 关于 n 的表达式，并用数学归纳法证明.